最近の臨界指数の求め方([相転移理論の概観と展望],「相転移の統計力学」研究会報告,基研研究会報告)

最近の臨界指数の求め方

東大物性研　　鈴　木　増　雄

臨界現象の統計力学[1-3]における最近の問題は

1. universality　（臨界指数の普遍性）
2. scaling law　（くりこみ可能，解析性と同次性 ⇨ 臨界指数間の法則性）

の２つの概念を柱にして展開されている。これらを具体的に議論する方法として次のようなものをあげることができる。

1. 厳密解（eight－vertex model，４体力イジング模型）[4-6]
2. 古典的な摂動論（熱力学的諸量の高温展開，低温展開とPadé，ratio methodの適用）
3. mode－mode coupling theory
4. 場の理論，特にくりこみ理論の方法[7-9]
5. 臨界指数の展開[10-19]

　　5－a）　厳密解からの摂動論

　　5－b）　くりこみ理論における摂動計算，ないしくりこみ理論の併用

それぞれに最近大きな進歩があった。詳しくは，この研究会の各論を参照して戴くことにして，ここでは，5.の臨界指数の展開の要点をまとめておく。一般に，ハミルトニアンが$\mathcal{H}=\mathcal{H}(\lambda)$の如く，パラメタ$\lambda$を含むか，或いは，もっと一般に（次元$d$のように）位相空間の積分のところにパラメタ$\lambda$が含まれる場合を考える。今，仮に，$\lambda=0$のところで，すでに相転移が起り，

a）厳密解が求まるか，

b）ハミルトニアンがくりこみ可能で，$\lambda=0$でclassicalな（分子場の）結果になる，

としよう。その場合には，静的並びに（輸送係数のような）動的な任意の物理量Qを

$$Q=Q_0+\lambda Q_1+\lambda^2 Q_2+\cdots\cdots \qquad (1)$$

の如く，λで展開し，その展開係数Q_1，Q_2，…… のT_c近傍での異常性を調べることができる。一方，Qが$T_c(\lambda)$の近くで，

$$Q \simeq A(\lambda)\ \varepsilon(\lambda)^{-\phi(\lambda)}\ ;\ \varepsilon(\lambda) = \{ T - T_c(\lambda) \} / T_c(\lambda)\ , \tag{2}$$

のような異常性を持つと仮定し，これを λ で微分すると，

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \simeq -A\phi(0)\ \varepsilon'(0)\ \varepsilon^{-\phi-1} - A\phi'(0)\ \varepsilon^{-\phi} \ln \varepsilon + A'(0)\ \varepsilon^{-\phi}\ ; \tag{3}$$

$$= -\phi(0)\ \varepsilon'(0)\ \varepsilon^{-1}\ \chi_0 - \phi'(0)\ \chi_0 \ln\varepsilon + A'(0)\ \varepsilon^{-\phi}. \tag{3$'$}$$

そこで，(1) の Q_1 の漸近形が，

$$Q_1 \simeq Q_1^{(1)}\ \varepsilon^{-\phi-1} + Q_1^{(2)}\ \varepsilon^{-\phi} \ln\varepsilon + O(\varepsilon^{-\phi})\ , \tag{4}$$

と求まったとすれば，(3) と (4) を比較して (matching conditions)

(ⅰ) 臨界指数のシフト ⇨ $\phi'(0) = -Q_1^{(2)} / A$, (5)

(ⅱ) T_c のシフト ⇨ $\varepsilon'(0) = -Q_1^{(1)} / A$ (6)

となる。このようにして，原理的には，高次まで進めることができ，

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \lambda\,\phi_1 + \lambda^2\,\phi_2 + \cdots\cdots \tag{7}$$

$$T_c(\lambda) = T_c(0) + \lambda\,T_1 + \lambda^2\,T_2 + \cdots\cdots \tag{8}$$

のように臨界指数と臨界点が展開形式で求まる。この級数が収斂級数になるか，漸近級数になるかは，個々に検討しなければならない。以上では，簡単のために，(2)のようにもっとも単純な異常性を示す場合を例にして説明したけれど，比熱の場合に見られる如く，対数発散ないし，対数異常性が(2)に重乗される場合でも，上の方法は次のように拡張して適用することが出来る。即ち，まず，

$$Q \simeq A(\lambda)\ \varepsilon(\lambda)^{-\phi(\lambda)} \ln\varepsilon(\lambda) \tag{9}$$

とすると，(3) に対応して，

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \simeq A\,\varepsilon'(0)\ \varepsilon^{-\phi-1}\ (\ \phi(0)\ \ln\varepsilon - 1\ )$$

$$- A\phi'(0)\ \varepsilon^{-\phi}\ (\ \ln\varepsilon\ )^2 + A'(0)\ \varepsilon^{-\phi}\ , \tag{10}$$

となり，Q_1 の中に $\varepsilon^{-\phi}(\ln\varepsilon)^2$ が現れたら，(9) の形を採用しなければならない。さらにこの方法に関して注意すべきことは，たとえ，most divergent term が(2)ないし，(9)のように表わされることが確実であっても，もし仮に，next divergent termに，それぞれ $B_1(\lambda)\,\varepsilon^{-\phi(\lambda)-1}\ln\varepsilon$ ないし，$B_2(\lambda)\,\varepsilon^{-\phi(\lambda)-1}(\ln\varepsilon)^2$ のような異常性が存在すれば，その微分から，それぞれ $B_1\,\varepsilon'\varepsilon^{-\phi}$ ないし，$2B_2(0)\,\varepsilon'\varepsilon^{-\phi}(\ln\varepsilon)$ が現れ，(3)ないし，(10) の $\phi'(0)$ を含む項と同じ異常性を持つことになるから，その分を差し引かねばならない。(ε'は前と同様に決まるから，この差し引きは，原理的に可能である。)

これらの具体的な応用例については，「ヘリウム」の研究会報告(物性研究前号)とこの研究会の各論の報告を参照して下さい。

参　考　文　献

○解　説

1) 森　　肇　：　日本物理学会誌 22(1967)835；物性 9(1968)399.

2) 川崎恭治　：　科学 37(1967)496；固体物理 7(1972)3.

3) 鈴木増雄　：　物性 12(1971)529；固体物理 7(1972)37；日本物理学会誌　8月号(1972).

○厳密解(eight－vertex model，　4体力イジング模型に関するもの)

4) R. J. Baxter；Phys. Rev. Letters 26(1971)832；Ann. Phys. (N. Y.) 70(1972) 193, 323.

5) L. P. Kadanoff and F. J. Wegner；Phys. Rev. B4(1972) 3989.

6) M. Suzuki；Phys. Rev. Letters 28(1972)507.

○くりこみ理論の方法を用いるもの

7) A. M. Polyakov；JETP 28(1969)533；30(1970)151, 1164.

8) A. A. Migdal；JETP 28(1969)1036；32(1971)552.

9) K. G. Wilson；Phys. Rev. 4B(1971)3174, 3184.
K. G. Wilson and M. E. Fisher；Phys. Rev. Letters. 28(1972)240.

○臨界指数の展開に関するもの

10) K. G. Wilson；Phys. Rev. Letters 28(1972)548.

11) M. Suzuki；Phys. Rev. Letters 28(1972)507.

12) M. E. Fisher and P. Pfeuty ; Phys. Rev. (in press).

13) F. Wegner ; Phys. Rev. (in press).

14) M.K. Grover , L. P. Kadanoff and F. J. Wegner , Phys. Rev. B6 (1972), 311.

15) P. G. De Gennes , Phys. Letters 38A (1972) 339。

16) J. Hubbard , Phys , Letters 39A (1972) 365 ; 40A (1972) 111.

17) R. Abe ; Prog. Theor. Phys. (in press).

18) S. Ma ; preprint (University of California).

19) M. Suzuki ; to be submitted to Prog. Theor. Phys.